Appendix 32 A: Zur Physik des Schalls

Da man als Student heute in der Regel wenig über Physik des Schalle lernt, sollen hier einige wichtige Grundlagen zusammengestellt werden. Schwingungen kleiner Amplitude in kompressiblen Medien werden als Schallwellen bezeichnet. Kleine Amplituden bedeuten kleine Änderungen des konstanten mittleren Druckes p_0 und der Dichte ρ_0.

$$p = p_0 + p' \tag{1}$$

und

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

Der Schall ist ein adiabatischer (und damit reversibler) Vorgang, da die Schwingungen zu schnell sind um Impuls mit der Umgebung auszutauschen. Dadurch wird in erster Näherung keine Energie dissipiert und es gilt folgender Zusammenhang:

$$p' = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_{\rho_0}\rho' \tag{2}$$

Für kleine Amplituden kann man die mit dem Schall verbundene Strömung durch die in §37 eingeführte Euler-Gleichung beschreiben (da ?$\frac{\partial v}{\partial t} \approx 0$ ist):

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad(p) = 0 \tag{3}$$

Die Kontinuitätsgleichung ($\frac{\partial \rho}{\partial t} - div(\rho \vec{v}) = 0$) muss dagegen nur auf die Fluktuation der Dichte angewandt werden und hat die Form

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 div(\vec{v}) = 0 \tag{4}$$

Der Schall kann als Potentialströmung angesehen werden, d. h. die Geschwindigkeit kann als Gradient eines Potentials $\vec{v} = grad(\phi)$ dargestellt werden. Die Funktion ϕ gibt (wie das elektrische Potential) die Flächen gleicher Geschwindigkeit an und der Geschwindigkeitsvektor steht auf diesen Potentialflächen senkrecht.

Setzt man die Gleichung (3) in Gl (4)) ein und verwendet noch die Eulergleichung, so kann man zeigen, dass das Potential einer Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \phi = 0 \tag{5}$$

genügt, wobei c die Phasengeschwindigkeit der Welle ist.

$$c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{p'}{\rho'}} \tag{6}$$

Für ebene Wellen der Wellenlänge λ ergibt sich aus der Euler-Gleichung folgender Zusammenhang zwischen der Druckänderung p' und der Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}$ parallel zur Ausbreitungsrichtung:

$$\rho_0 c \vec{v} = p' \tag{7}$$

Für die Beschreibung der Hydrodynamik der Cochlea benötigen wir vor allem die Zusammenhänge zwischen der Energie, der Intensität und dem Schalldruck des Schalls. Die gesamte Energiedichte (Energie pro Volumen), W, setzt sich aus der potentiellen (E_p) und der kinetischen (E_k) Energie zusammen, wobei:

$E_p = \frac{1}{2}K(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0})^2$ und

$$E_k = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 \tag{8}$$

Da der Kompressionsmodul K gleich der reziproken Kompressibilität ($\kappa = \rho^{-1}\frac{\partial\rho}{\partial p}$) ist, können wir K durch die Schallgeschwindigkeit ersetzen. Es folgt mit (6):

$$W = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{c^2}{2\rho_0}\rho'^2 \tag{9}$$

Für ebene Wellen gilt stets, dass der quadratische Mittelwert der Amplitude gleich ihrem halben Maximalwert ist. Die mittlere Geschwindigkeit ist

$$\bar{v^2} = \frac{1}{2}v_0^2$$

Im Fall ebener Wellen gilt (7) und unter Berücksichtigung von (6) folgt für die mittlere Gesamtenergie:

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\rho_0\bar{v}^2 = \frac{\bar{p'}^2}{\rho_0 c^2} \tag{10}$$

Die mittlere Intensität I erhalten wir aus der Betrachtung des Energieflusses durch eine Einheitsfläche (deren Normale parallel zum Wellenvektor ist), d.h. die mittlere Intensität der Schallwelle ist

$$\bar{I} = \frac{1}{2}c\rho_0 v_0^2 \tag{11}$$

Oft ist es vorteilhaft, Effektivwerte der Druckschwankung ($P_{eff} = \frac{P_0}{\sqrt{2}}$)oder von v ($v_{eff} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$) einzuführen (so wie wir es in der Elektrizitätslehre gelernt haben). Besteht noch eine Phasenverschiebung ϕ zwischen Druck und Geschwindigkeit, so gilt die allgemeine Gleichung:

$$\bar{I} = P_{eff}v_{eff}cos(\phi) \tag{12}$$

Auch diese Gleichung folgt aus der Analogie zur Elektrotechnik.

Nun benötigen wir noch den Wellenwiderstand. Wir gehen von Gl (7) aus und schreiben diese in der Form

$$v(t) = \frac{p'(t)}{\rho_0 c} \tag{13}$$

Offenbar ist der Nenner ein Maß für den Widerstand, der der Ausbreitung der Schallwelle Behindert. Daher definiert man als Wellenwiderstand (Impedanz):

$$Z = \rho_0 c \tag{14}$$

Man kann damit den Zusammenhang zwischen der Intensität und dem Schalldruclk wie folgt darstellen

$$\bar{I} = \frac{1}{2} c \rho_0 v_0^2 = \frac{1}{2} Z v_0^2 \tag{15}$$

Diese Beziehung gilt auch für beliebige Wellenformen.

Es gelten dieselben Reflexions- und Brechungsgesetze wie in der Optik. Insbesondere ist das Reflexionsvermögen R (das Verhältnis zwischen reflektierter und einfallender Schallenergie) gegeben durch

$$R = (\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1})^2 \tag{16}$$

Wir geben diese Ergebnisse ohne Ableitung an. Der interessierte Leser findet sehr gut nachvollziehbare Darstellung der Gesetze der Reflexion und Streuung des Schalls in der Monographie von Landau und Lisfshitz (Band VI Hydrodynamik).